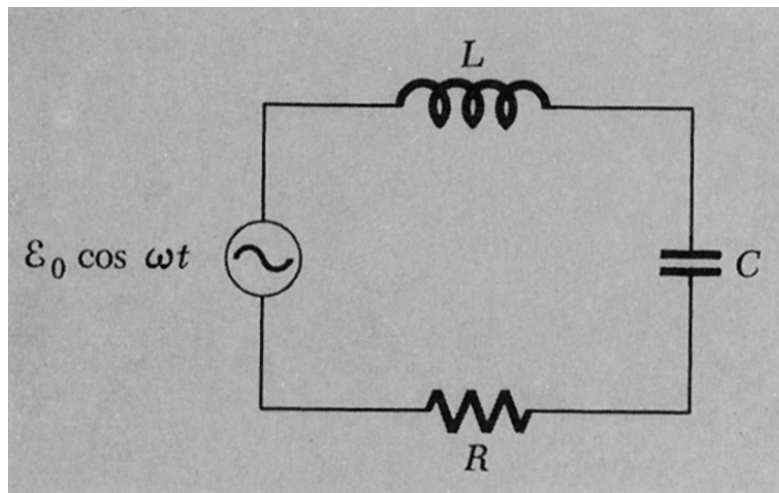


Circuito RLC: ressonância



$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \epsilon_0 \cos(\Omega t)$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\Omega \epsilon_0 \sin(\Omega t)$$

Solução geral: $I(t) = I_h(t) + I_p(t)$

Solução homogênea: $L \frac{d^2 I_h}{dt^2} + R \frac{dI_h}{dt} + \frac{I_h}{C} = 0$

$$I_h(t) \rightarrow 0 \text{ para } t \rightarrow \infty \quad (t \gg \frac{2L}{R}) \quad \Rightarrow \quad I(t) \approx I_p(t)$$

Solução particular satisfaz a equação:

$$L \frac{d^2 I_p}{dt^2} + R \frac{dI_p}{dt} + \frac{I_p}{C} = \frac{d\epsilon}{dt} = -\Omega \epsilon_0 \sin(\Omega t)$$

A solução particular é oscilatória e periódica, com período $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

Definimos $\tilde{\epsilon}(t) = \epsilon_0 e^{i\Omega t} \Rightarrow \epsilon(t) = \text{Re} [\tilde{\epsilon}]$

Resolvemos a equação: $L \frac{d^2 \tilde{I}_p}{dt^2} + R \frac{d\tilde{I}_p}{dt} + \frac{\tilde{I}_p}{C} = \frac{d\tilde{\epsilon}}{dt} = i\Omega \epsilon_0 e^{i\Omega t}$

A solução desejada $I_p(t) = \text{Re} [\tilde{I}_p(t)]$, pois $\text{Re} \left[\frac{d\tilde{\epsilon}}{dt} \right] = -\Omega \epsilon_0 \sin(\Omega t)$

Tentamos a solução: $\tilde{I}_p(t) = \tilde{I}_0 e^{i\Omega t} \Rightarrow$

$$\left(-\Omega^2 L + i\Omega R + \frac{1}{C} \right) \tilde{I}_0 e^{i\Omega t} = i\Omega \epsilon_0 e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow \left(R + i\Omega L + \frac{1}{i\Omega C} \right) \tilde{I}_0 e^{i\Omega t} = \epsilon_0 e^{i\Omega t} = \tilde{\epsilon}(t)$$

Definimos a impedância $Z = \left(R + i\Omega L + \frac{1}{i\Omega C} \right)$

Definimos a impedância $Z = \left(R + i\Omega L + \frac{1}{i\Omega C} \right) = R + i \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)$

$Z = R + iX$ **onde a reatância** $X = \Omega L - \frac{1}{\Omega C} = X_L + X_C$

$X_L = \Omega L$ (reatância indutiva) $X_C = -\frac{1}{\Omega C}$ (reatância capacitiva)

$\Rightarrow Z \tilde{I}_0 e^{i\Omega t} = \epsilon_0 e^{i\Omega t} \Rightarrow Z \tilde{I}_0 = \epsilon_0 \Rightarrow \boxed{\tilde{I}_0 = \frac{\epsilon_0}{Z}}$



A impedância Z pode ser vista como “resistência complexa”

$$Z = R + iX = |Z| e^{i\theta}; \quad |Z| = (R^2 + X^2)^{1/2}$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{X}{R} \right) = \arctan \left(\frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R} \right)$$

Nossa solução $\tilde{I}_p(t) = \tilde{I}_0 e^{i\Omega t} = \frac{\epsilon_0}{Z} e^{i\Omega t} = \frac{\epsilon_0}{|Z|} e^{(i\Omega t - \theta)}$

$$I_p(t) = \text{Re} [\tilde{I}_p(t)] = \frac{\epsilon_0}{|Z|} \cos(\Omega t - \theta) = A \cos(\Omega t - \theta)$$

Note que:

■ $I_p(t)$ está defasado em relação a fonte de tensão $\epsilon(t) = \epsilon_0 \cos(\Omega t)$

■ Tanto a amplitude da corrente quanto a defasagem dependem de Ω

$$A = A(\Omega) \quad \theta = \theta(\Omega)$$

■ $A(\Omega)$ tem um máximo

$$A(\Omega) = \frac{\epsilon_0}{|Z|} = \epsilon_0 [R^2 + (X_L + X_C)^2]^{-1/2}$$

$$\frac{dA}{d\Omega} = -\frac{\epsilon_0}{2} [R^2 + (X_L + X_C)^2]^{-3/2} 2(X_L + X_C) \left(\frac{dX_L}{d\Omega} + \frac{dX_C}{d\Omega} \right)$$

Tendo em vista que $\frac{dX_L}{d\Omega} = L;$ $\frac{dX_C}{d\Omega} = \frac{1}{\Omega^2 C}$

↑ ↑
Ambos são positivos

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_L + X_C = 0 \quad \Rightarrow \quad X_L = -X_C$$

■ A posição do máximo é dada por

$$\Omega L = \frac{1}{\Omega C} \quad \Rightarrow \quad \Omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

■ Para $\Omega = \omega_0$

Condições de Ressonância

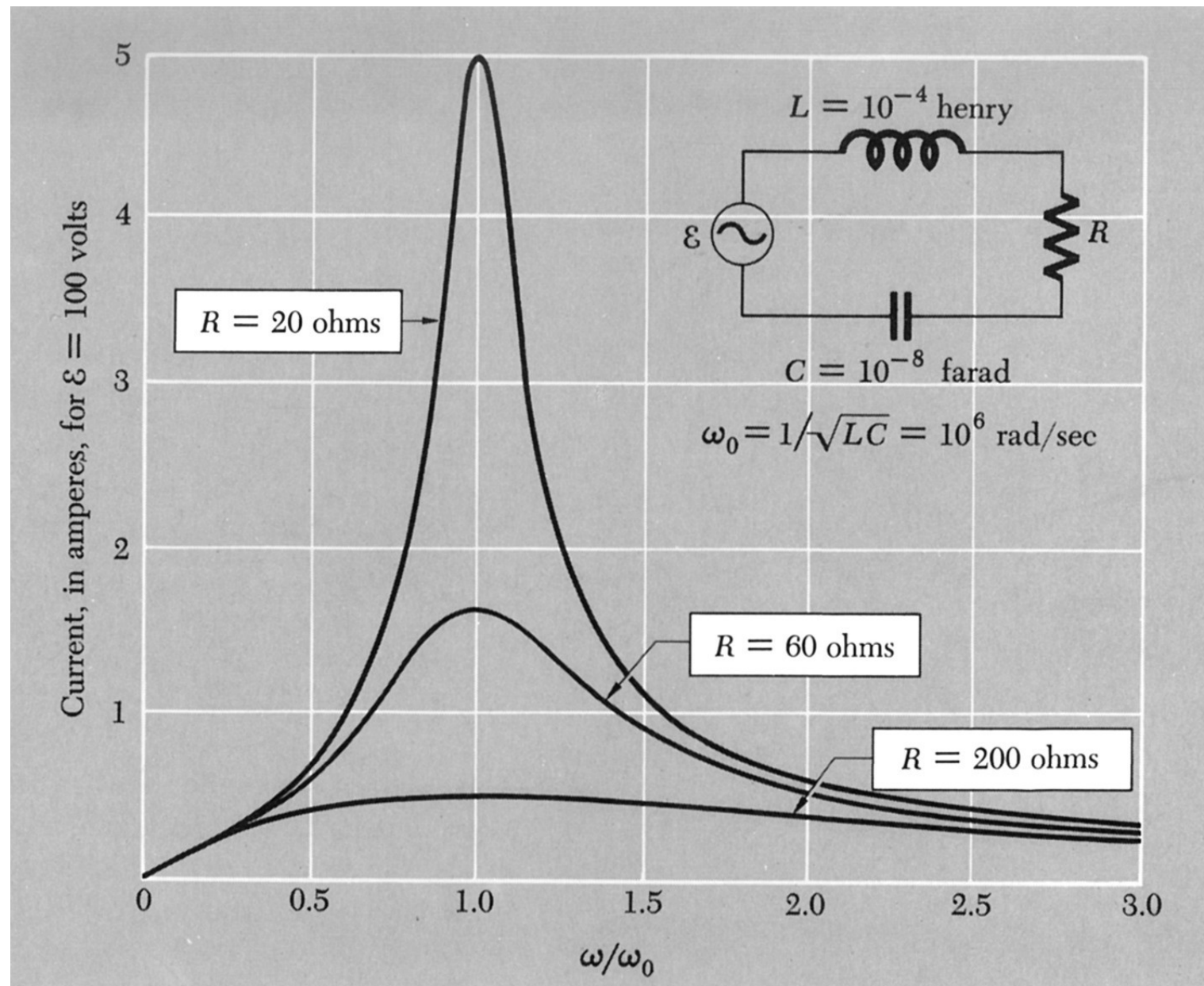
Na ressonância

$$A(\omega_0) = \frac{\epsilon_0}{R}$$

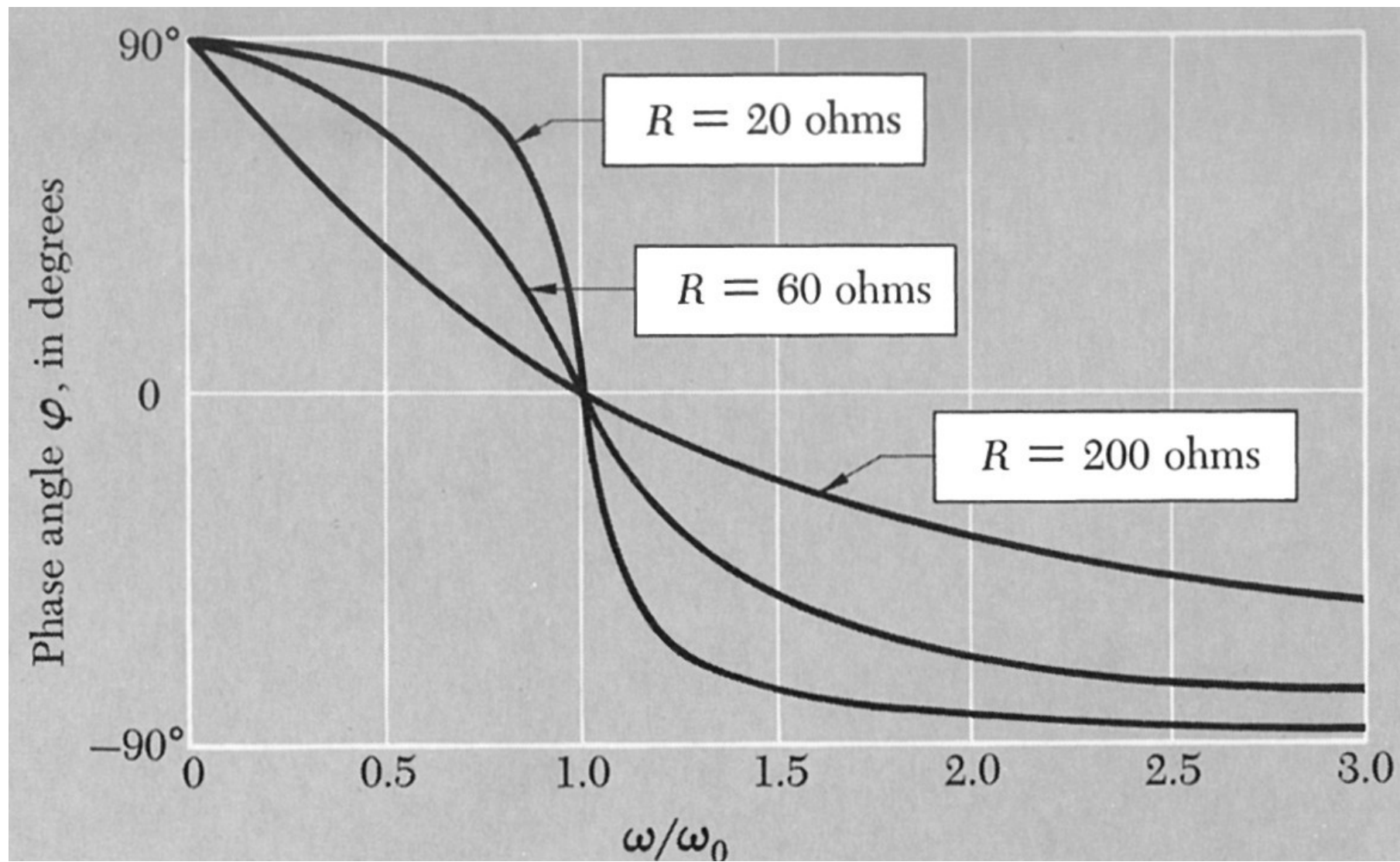
$$\theta(\omega_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad I(\omega_0) = \frac{\epsilon_0}{R} \cos(\omega_0 t)$$

Quanto menor for o valor da resistência R , mais alto será o pico



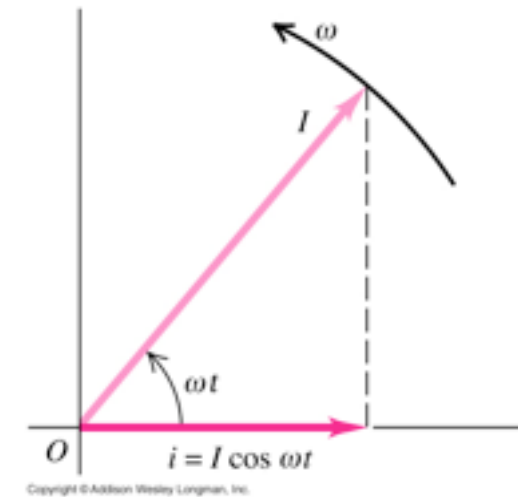
Ângulo de fase em graus



Fasores

Notação complexa permite uma análise simples

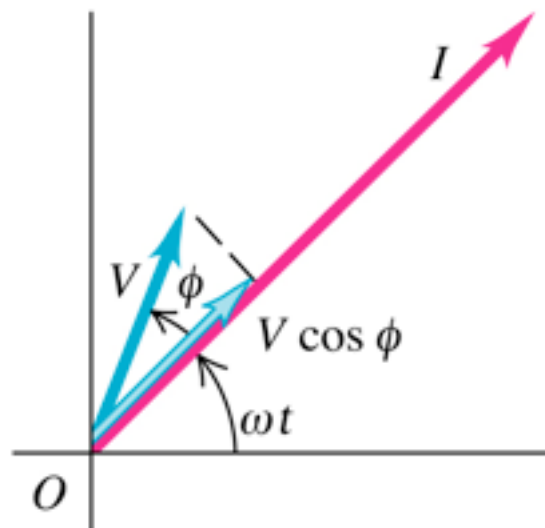
Dependência temporal da corrente: $\hat{I} = \bar{I}e^{i\Omega t}$



Dependência temporal da voltagem: $\hat{V} = \bar{V}e^{i\Omega t}$ onde $\bar{V} = V_0e^{i\phi}$

Voltagem defasada em relação à corrente

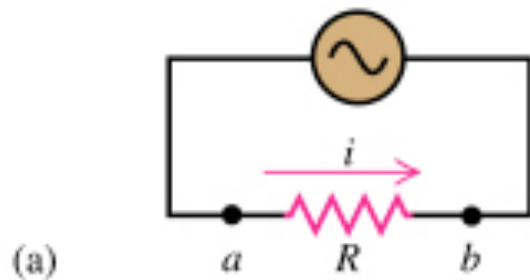
ϕ é a fase de V



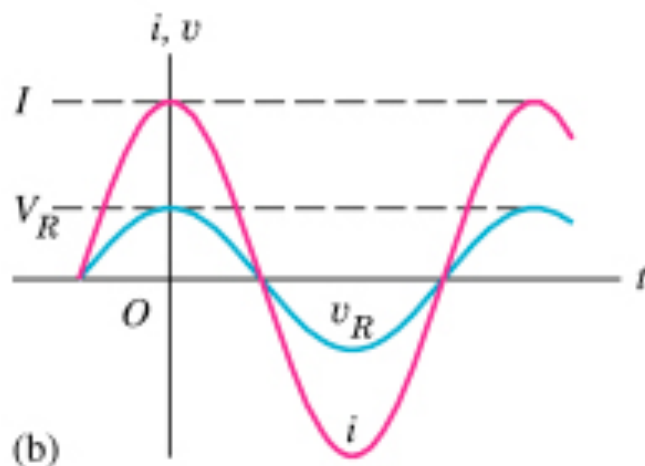
$$\hat{V} = V_0e^{(i\Omega t + \phi)}$$

Circuito puramente resistivo

Em qq instante de tempo: $\epsilon - Ri = 0 \Rightarrow \epsilon = Ri$



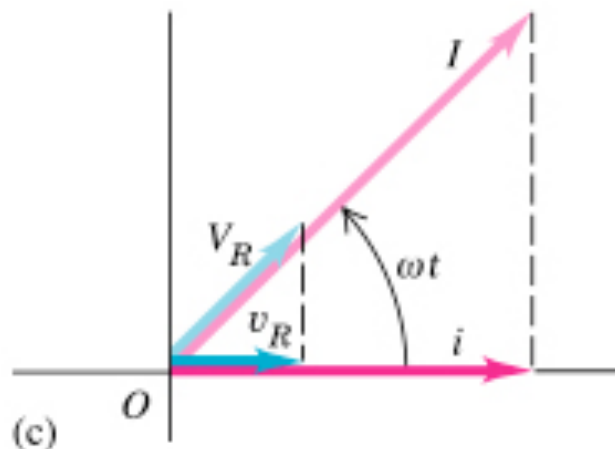
$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\Omega t}; \quad \tilde{\epsilon}(t) = \epsilon_0 e^{i\Omega t}$$



$$\tilde{\epsilon}(t) = R \tilde{I}(t); \quad \tilde{\epsilon} = Z \tilde{I} \Rightarrow \boxed{Z_R = R}$$

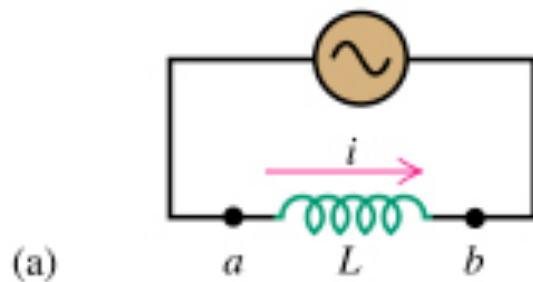
■ A impedância resistiva é a própria resistência (#real)

■ A d.d.p. $\tilde{\epsilon}_R$ está em fase com a corrente $\tilde{I}$.



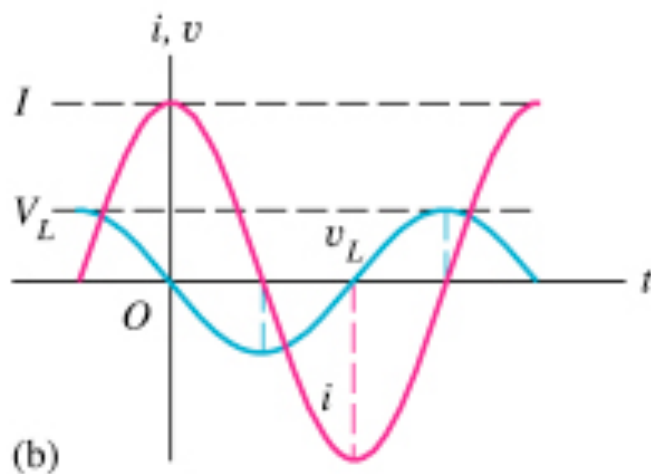
Circuito puramente indutivo

Em qq instante de tempo: $\epsilon - L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \epsilon = L \frac{di}{dt}$



$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\Omega t}; \quad \tilde{\epsilon}(t) = \epsilon_0 e^{i\Omega t}$$

$$L \frac{d\tilde{I}}{dt} = \tilde{\epsilon} = i\Omega L \tilde{I}; \quad \tilde{\epsilon} = Z\tilde{I} \Rightarrow \boxed{Z_L = i\Omega L}$$

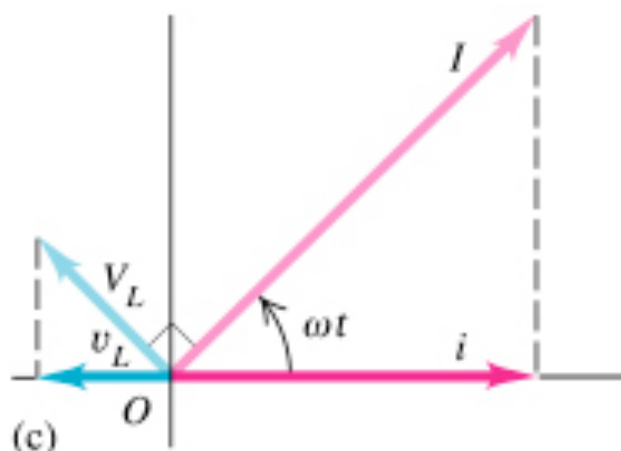


■ A impedância indutiva é puramente imaginária

$$Z_L = iX_L \Rightarrow X_L = \Omega L$$

$$\tilde{\epsilon} = \Omega L e^{i\pi/2} \tilde{I} \Rightarrow$$

■ A d.d.p. $\tilde{\epsilon}_L$ está **adiantada** de $\frac{\pi}{2}$ em relação a $\tilde{I}$.



Circuito puramente capacitivo

Em qq instante de tempo: $\epsilon - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \epsilon = \frac{q}{C} \Rightarrow q = C\epsilon$

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow i = C \frac{d\epsilon}{dt}$$

$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\Omega t}; \quad \tilde{\epsilon}(t) = \epsilon_0 e^{i\Omega t}$$

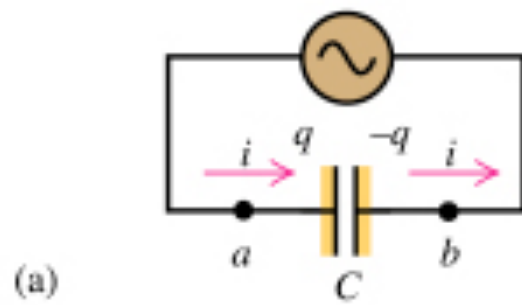
$$\tilde{I} = C \frac{d\tilde{\epsilon}}{dt} = i\Omega C \tilde{\epsilon}; \quad \tilde{\epsilon} = Z\tilde{I} \Rightarrow \boxed{Z_C = \frac{1}{i\Omega C}}$$

■ A impedância indutiva é puramente imaginária

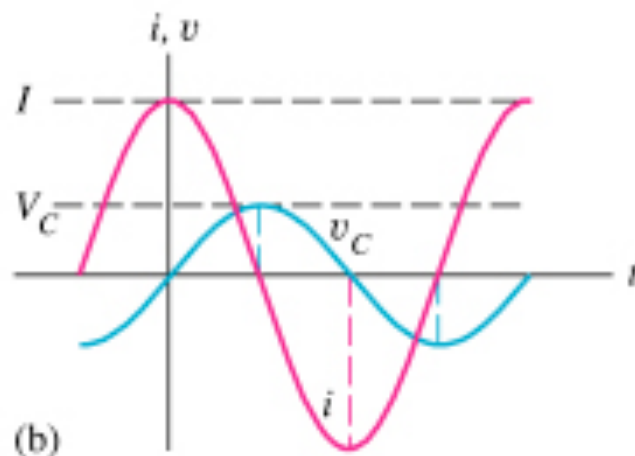
$$Z_C = iX_C \Rightarrow X_C = -\frac{1}{\Omega C}$$

$$\tilde{\epsilon} = \left(\frac{1}{\Omega C} \right) e^{-i\frac{\pi}{2}} \tilde{I} \Rightarrow$$

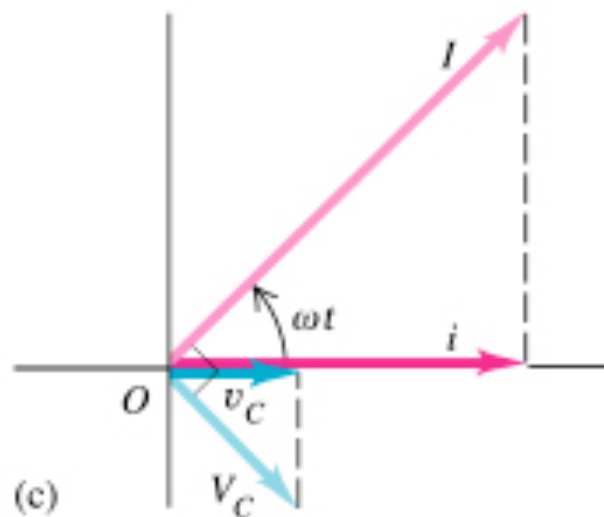
■ A d.d.p. $\tilde{\epsilon}_L$ está **atrazada** de $\frac{\pi}{2}$ em relação a $\tilde{I}$.



(a)



(b)



(c)

Conexão de impedâncias em série

- A corrente que flui através dos elementos do circuito é a mesma



$$V = V_1 + V_2 = Z_1 I + Z_2 I = (Z_1 + Z_2) I$$

$$V_{eq} = Z_{eq} I \quad \Rightarrow \quad Z_{eq} = Z_1 + Z_2$$

- * Nota: as impedâncias se somam como números complexos

$$Z_1 = R_1 + iX_1; \quad Z_2 = R_2 + iX_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{eq} = (R_1 + R_2) + i(X_1 + X_2)$$

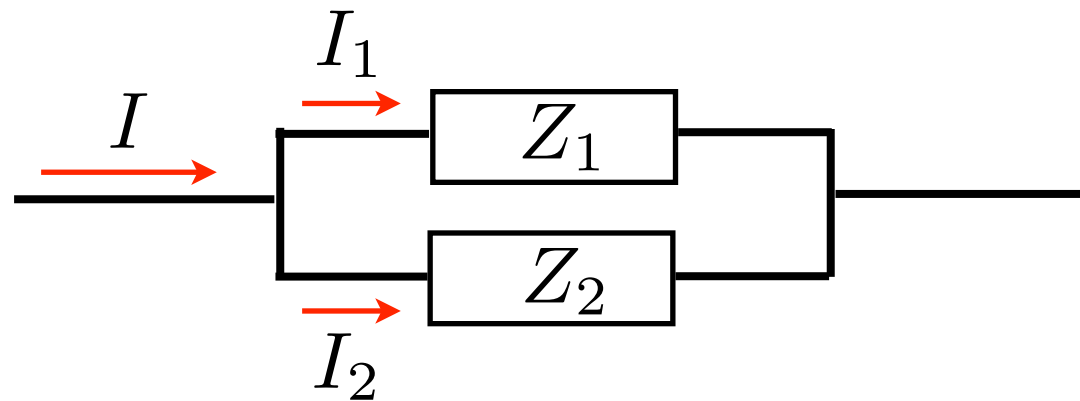
$$Z_{eq} = |Z_{eq}| e^{i\theta}$$

$$|Z_{eq}| = \left[(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2 \right]^{1/2}$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Conexão de impedâncias em paralelo

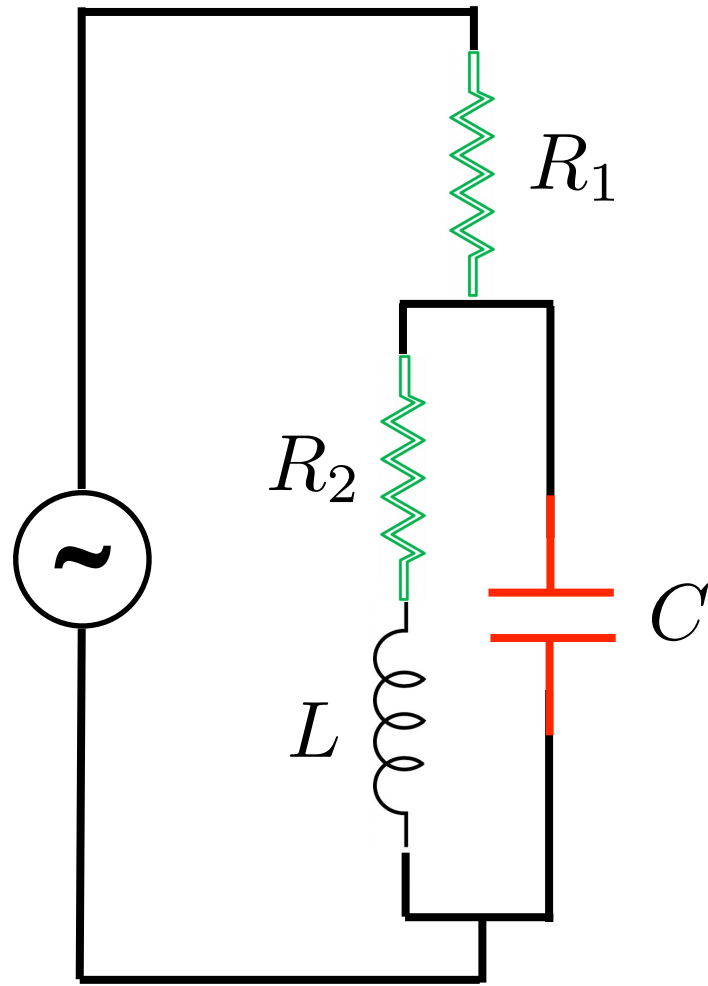
- A d.d.p. nos terminais dos elementos do circuito é a mesma e a corrente total é a soma das correntes que fluem através deles



$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} = \frac{V}{Z_{eq}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$$

- * Nota: mais uma vez, as impedâncias se somam como números complexos e a soma deve ser feita como tal.

Exemplo



$$Z = R_1 + Z'$$

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z''}$$

$$Z'' = R_2 + Z_L$$

$$Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z'}}$$

$$Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{R_2 + Z_L}}$$

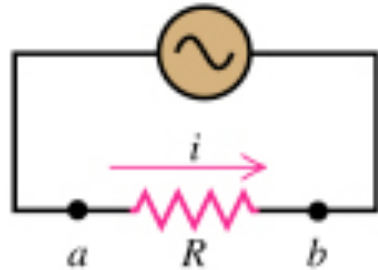
$$Z_L = i\Omega L; \quad Z_C = \frac{1}{i\Omega C} \quad \Rightarrow \quad Z = R_1 + \frac{1}{i\Omega C + \frac{1}{R_2 + i\Omega L}}$$

$$Z = R + iX \quad |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \theta = \arctan \frac{X}{R}$$

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\epsilon}}{Z} = \frac{e^{-i\theta} \tilde{\epsilon}}{|Z|}$$

Potência média em um circuito CA

Circuito puramente resistivo $P = \epsilon I = R I^2 = \frac{\epsilon^2}{R}$



$$\epsilon = \epsilon_0 \sin(\omega t); \quad I = I_0 \sin(\omega t) \quad \Rightarrow$$

$$P = \epsilon_0 I_0 \sin^2(\omega t) = R I_0^2 \sin^2(\omega t) = \frac{\epsilon_0^2}{R} \sin^2(\omega t)$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P(t) dt = \frac{R I_0^2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2(\omega t) dt \rightarrow \frac{T}{2}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_0^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 I_0 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2}{R}$$

* Note a existência do fator 1/2.

Podemos definir a corrente eficaz (I_{ef} ou I_{rms}) e a tensão efetiva (ϵ_{ef} ou ϵ_{rms})

$$I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \quad \epsilon_{ef} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \langle P \rangle = R I_{ef}^2 = \epsilon_{ef} I_{ef} = \frac{\epsilon_{ef}^2}{R}$$

No Rio a tensão eficaz nas nossas residências é $\epsilon_{ef} = 127 \text{ V} \Rightarrow \epsilon_0 \approx 180 \text{ V}$

Amplitude da tensão



Potência média em um circuito geral CA

*** Em um circuito geral a corrente é defasada em relação à tensão**

$$\epsilon = \epsilon_0 \sin(\Omega t); \quad I = I_0 \sin(\Omega t - \phi) \Rightarrow$$

$$P = \epsilon I = \epsilon_0 I_0 \sin(\Omega t) \sin(\Omega t - \phi)$$

Utilizando a relação trigonométrica

$$\sin(\Omega t - \phi) = \sin(\Omega t) \cos(\phi) - \sin(\phi) \cos(\Omega t)$$

obtemos

$$P = \epsilon_0 I_0 \cos(\phi) \sin^2(\Omega t) - \epsilon_0 I_0 \sin(\phi) \sin(\Omega t) \cos(\Omega t)$$

A potência média

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 I_0 \cos(\phi) = \epsilon_{ef} I_{ef} \cos(\phi)$$

fator de potência

$$Z = R + iX \quad \Rightarrow \quad |Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\cos(\phi) = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

fator de potência



A potência média

$$\langle P \rangle = \epsilon_{ef} I_{ef} \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$